Ad-Soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

<u>MAT 103 Lineer Cebir I Final Sınavı Soruları 23.01.2021</u>

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Mümkünse cevaplarınızı PDF dosyasına dönüştürerek gönderiniz. Öğrenmediğimiz yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazarak cevaplayınız.

(D) Her cisim kendi üzerinde bir vektör uzayıdır.

(Y) Bir grubun keyfi iki alt grubunun birleşimi de bir alt gruptur.

(D) Bir vektör uzayının keyfi iki alt vektör uzayının kesişimi de bir alt vektör uzayıdır.

(D) Bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda vektör vardır.

(D) Her halka aynı zamanda değişmeli gruptur.

2) $x=(2,3,5),\ y=(1,6,-4)\in\mathbb{R}^3$ vektörleri veriliyor.

a) Bu vektörler arasındaki açıyı bulunuz.

b) x vektörünü birim vektör haline dönüştürünüz.

3) $\langle\ ,\ \rangle_1$ ve $\langle\ ,\ \rangle_2$ bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı iç çarpım fonksiyonları olsun. $\forall x,y\in V$ için $\langle x,\ y\rangle=\langle x,\ y\rangle_1+\langle x,\ y\rangle_2$ şeklinde tanımlanan $\langle\ ,\ \rangle:V\times V\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir iç çarpım fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

4) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ L(x,y,z)=(x+y,x-2y+z)$ fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olup olmadığını araştırınız.

5) $S\neq\varnothing$ ve V bir reel vektör uzayı olsun. $D=\{f\mid f:S\to V\ \text{fonksiyon}\}$ şeklinde tanımlanan D kümesinin $\forall f,g\in D,\forall c\in\mathbb{R}$ ve $\forall s\in S$ için

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s),$$
$$(cf)(s)=cf(s)$$

işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

2) a) $\cos\alpha = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ olduğunu biliyoruz.

$\langle x,y\rangle = \langle (2,3,5),(1,6,-4)\rangle = 2.1+3.6+5.(-4) = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

b) x vektörünü birim vektöre dönüştürmek için boyuna bölmeliyiz.

$\|x\| = \sqrt{2^2+3^2+5^2} = \sqrt{38}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{1}{\sqrt{38}}(2,3,5)$

3) $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$ fonksiyonunun iç çarpım fonksiyonu olduğunu göstermek için simetri, bilineerlik ve pozitif tanımlılık özelliklerini sağladığını göstermeliyiz.

Simetri: $\forall x,y \in V$ için

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \langle x,y\rangle_1 + \langle x,y\rangle_2 \\ &= \langle y,x\rangle_1 + \langle y,x\rangle_2 \quad (\langle\ ,\ \rangle_1 \text{ ve } \langle\ ,\ \rangle_2 \text{ simetrik}) \\ &= \langle y,x\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Simetri özelliği sağlanır.

Bilineerlik: $\forall x,y,z \in V$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\langle cx+y,z\rangle = \langle cx+y,z\rangle_1 + \langle cx+y,z\rangle_2$$

$(\langle\ ,\ \rangle_1$ ve $\langle\ ,\ \rangle_2$ bilineer$)$ $= c\langle x,z\rangle_1 + \langle y,z\rangle_1 + c\langle x,z\rangle_2 + \langle y,z\rangle_2$

$$= c\underbrace{(\langle x,z\rangle_1 + \langle x,z\rangle_2)}_{\langle x,z\rangle} + \langle y,z\rangle_1 + \langle y,z\rangle_2$$

$$= c\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

$\Rightarrow \langle\ ,\ \rangle$ 1. yere göre lineer.

$$\langle x,cy+z\rangle \underset{(\text{simetri})}{=} \langle cy+z,x\rangle \underset{\left(\substack{\text{1. yere göre} \\ \text{lineerlik}}\right)}{=} c\langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle$$

$\Rightarrow \langle\ ,\ \rangle$ 2. yere göre lineer.

Pozitif tanımlılık: $\forall x \in V$ alalım.

$$\langle x,x\rangle = \underbrace{\langle x,x\rangle_1}_{\geq 0} + \underbrace{\langle x,x\rangle_2}_{\geq 0} \geq 0 \qquad (\langle\,,\rangle_1, \langle\,,\rangle_2 \text{ pozitif tanımlı})$$

$$\langle x,x\rangle = 0 \iff \underbrace{\langle x,x\rangle_1}_{\geq 0} + \underbrace{\langle x,x\rangle_2}_{\geq 0} = 0 \iff \langle x,x\rangle_1 = 0 = \langle x,x\rangle_2$$

$$\iff x = 0_V \qquad (\langle\,,\rangle_1, \langle\,,\rangle_2 \text{ pozitif tanımlı})$$

$\Rightarrow \langle\,,\rangle$ pozitif tanımlıdır.

$\therefore \langle\,,\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ iç çarpım fonksiyonudur.

4) $\forall x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, $\forall c\in\mathbb{R}$ alalım.

$$L(cx+y) = L(c(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) = L(cx_1+y_1, cx_2+y_2, cx_3+y_3)$$

$$= ((cx_1+y_1)+(cx_2+y_2),\ (cx_1+y_1)-2(cx_2+y_2)+(cx_3+y_3))$$

($\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı)

$$= (c(x_1+x_2)+(y_1+y_2),\ c(x_1-2x_2+x_3)+(y_1-2y_2+y_3))$$

$$= (c(x_1+x_2),\ c(x_1-2x_2+x_3)) + (y_1+y_2,\ y_1-2y_2+y_3)$$

$$= c(x_1+x_2,\ x_1-2x_2+x_3) + (y_1+y_2,\ y_1-2y_2+y_3)$$

$$= cL(x)+L(y)$$

$\Rightarrow L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ bir lineer dönüşümdür.

5) $(D,+)$ değişmeli gruptur:

- $D\neq\emptyset$: $\forall s\in S$ için $f(s)=0_V$ olarak tanımlanan $f:S\to V$ için $f\in D$ olup $D\neq\emptyset$ dir.

- $+$ iç işlemdir: $\forall f,g\in D$ için

$$(f+g)(s) = \underbrace{\underbrace{f(s)}_{\in V} + \underbrace{g(s)}_{\in V}}_{\in V}, \quad \forall s\in D$$

olduğundan $f+g\in D$ olup "+" işlemi iç işlemdir.

. Birleşme özelliği: $\forall f,g,h \in D$, $\forall s \in S$ alalım.

$$((f+g)+h)(s) = (f+g)(s) + h(s) = (\underbrace{f(s)}_{\in V} + \underbrace{g(s)}_{\in V}) + \underbrace{h(s)}_{\in V}$$

(V vektör uzayı) $= f(s) + (g(s) + h(s)) = (f + (g+h))(s)$

$\Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$ olup birleşme özelliği sağlanır.

. Birim eleman: $\forall s \in S$ için $f(s) = 0_V$ olarak tanımlanan $f: S \to V$ fonksiyonu birim elemandır: $\forall g \in D$ alalım.

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(s) &= \underbrace{f(s)}_{0_V} + g(s) = g(s) \\ (g+f)(s) &= g(s) + \underbrace{f(s)}_{0_V} = g(s) \end{aligned}\right\} f \in D \text{ birim elemandır.}$$

. Değişme özelliği: $\forall f,g \in D$, $\forall s \in S$ için

$$(f+g)(s) = \underbrace{f(s)}_{\in V} + \underbrace{g(s)}_{\in V} = g(s) + f(s) = (g+f)(s)$$
(V vektör uzayı)

$\Rightarrow f+g = g+f$ olup değişme özelliği sağlanır.

O halde, $(D,+)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Şimdi de, vektör uzayı aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

Buradaki dış işlem, $\forall f \in D$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$(cf)(s) = c f(s) \quad , \forall s \in S$$

şeklinde tanımlanmıştır.

. $\forall f,g \in D$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$(c(f+g))(s) = c(f+g)(s) = c(\underbrace{f(s)}_{\in V} + \underbrace{g(s)}_{\in V}) = cf(s) + cg(s)$$
(V vektör uzayı)

$$= (cf)(s) + (cg)(s)$$

$$= (cf+cg)(s)$$

$\Rightarrow c(f+g) = cf+cg.$

. $\forall f \in D$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$((c_1+c_2)f)(s) = (c_1+c_2)\underbrace{f(s)}_{\in V} = c_1 f(s) + c_2 f(s) = (c_1 f)(s) + (c_2 f)(s)$$

$$= (c_1 f + c_2 f)(s) \ , \ \forall s \in S$$

$$\Rightarrow (c_1+c_2)f = c_1 f + c_2 f$$

. $$((c_1 c_2)f)(s) = \underbrace{(c_1 c_2)}_{\in \mathbb{R}}\underbrace{f(s)}_{\in V} = c_1(c_2 f(s)) = c_1((c_2 f)(s)) = (c_1(c_2 f))(s) \ , \forall s \in S$$

$$\Rightarrow (c_1 c_2) f = c_1(c_2 f)$$

. $\forall f \in D$ için

$$(1 f)(s) = 1 f(s) = f(s) \ , \ \forall s \in D \Rightarrow 1f = f$$

$\therefore$ D kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır.